



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

9. Dezember 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 8

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Fläche, die der folgende Abschnitt einer logarithmischen Spirale mit der x -Achse einschließt:

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie das folgende Integral mit Hilfe partieller Integration:

$$c_n = \int_0^\pi (\sin x)^n dx$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie das Volumen $V_n = v(K_n)$ der n -dimensionalen Einheitskugel:

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

Wenden Sie hierzu den Satz von Fubini an und verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ lokal-integrierbar. Zeigen Sie, dass dann für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ die Menge

$$f^{-1}[I] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in I\}$$

messbar ist.



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

10. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 8

Aufgabe 1: Da die x -Achse eine Nullmenge ist, genügt es, die Fläche der Menge

$$A = \{c \cdot f(t) \mid c \in (0, 1), t \in (0, \pi)\}$$

zu bestimmen. Diese enthält genau die Punkte $(s \cos(t), s \sin(t))$ mit $0 < s < e^t$ und $0 < t < \pi$. Die Darstellung in Polarkoordinaten liefert also einen Diffeomorphismus

$$\varphi : B \rightarrow A, \varphi(s, t) = (s \cos(t), s \sin(t))$$

von $B = \{(s, t) \in \mathbb{R} \times (0, \pi) \mid 0 < s < e^t\}$ nach A . Nach dem Transformationssatz gilt:

$$v(A) = \int_A 1 \, d(x, y) = \int_B s \, d(s, t) = \int_0^\pi \int_0^{e^t} s \, ds \, dt = \int_0^\pi \frac{e^{2t}}{2} \, dt = \frac{e^{2t}}{4} \Big|_0^\pi = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}$$

Aufgabe 2: Bekanntermaßen ist $c_0 = \pi$ und $c_1 = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$.

Im Fall $n > 1$ spalten wir einen Faktor $\sin x$ ab und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi \sin^n x \, dx = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)(n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= \int_0^\pi (n-1) \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx = (n-1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1)(c_{n-2} - c_n) \end{aligned}$$

Also ist $c_n = \frac{n-1}{n} c_{n-2}$. Für gerade n folgt daher mit Induktion

$$c_n = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} = \pi \prod_{m=1}^{n/2} \frac{2m-1}{2m}$$

und für ungerade n :

$$c_n = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} = 2 \prod_{m=1}^{(n-1)/2} \frac{2m}{2m+1}$$

Aufgabe 3: Für $t \in [-1, 1]$ ist $(K_n)_t = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - t^2\} = \sqrt{1 - t^2} \cdot K_{n-1}$. Wendet man etwa den Transformationssatz auf $x \mapsto (1 - t^2)x$ an, erhält man $v(\sqrt{1 - t^2}K_{n-1}) = \sqrt{1 - t^2}^{n-1} v(K_{n-1}) = \sqrt{1 - t^2}^{n-1} V_{n-1}$. Nach dem Satz von Fubini ist also für $n > 2$:

$$V_n = \int_{-1}^1 v((K_n)_t) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}^{n-1} V_{n-1} dt = V_{n-1} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}^{n-1} dt$$

Um nun Aufgabe 2 anwenden zu können, substituieren wir t durch $-\cos s$:

$$V_n = V_{n-1} \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 s}^{n-1} \sin s ds = V_{n-1} \int_0^\pi \sin^n s ds = V_{n-1} c_n$$

Es ist aber $c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}$, also $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$. Mit $V_1 = v([-1, 1]) = 2$ und $V_2 = \pi$ erhalten wir nach Induktion:

$$V_{2m} = \frac{2^m \pi^m}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m} = \frac{\pi^m}{m!}$$

$$V_{2m+1} = \frac{2^m \pi^m}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}$$

Aufgabe 4: Jedes Intervall ist Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. Es ist also jede Menge $f^{-1}[I]$ mit einem Intervall I die Vereinigung abzählbar vieler $f^{-1}[J_k]$ mit offenen Intervallen J_k . Es genügt also zu zeigen, dass $f^{-1}[I]$ für offene Intervalle I messbar ist, dass also $f^{-1}[I] \cap K$ für jedes kompakte K integrierbar ist. Sei also $I = (a, b)$.

$\mathbf{1}_K \cdot \min\{1, \max\{0, n \cdot (f - a\mathbf{1}_K)\}\}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbar. Außerdem ist die Folge monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen $\mathbf{1}_{K \cap f^{-1}((a, \infty))}$. Nach dem Satz von Levi ist also $K \cap f^{-1}((a, \infty))$ integrierbar. Ebenso zeigt man, dass $K \cap f^{-1}((-\infty, b)) = K \cap (-f)^{-1}((-b, \infty))$ integrierbar ist. $f^{-1}[I] \cap K$ ist der Durchschnitt dieser beiden Mengen.